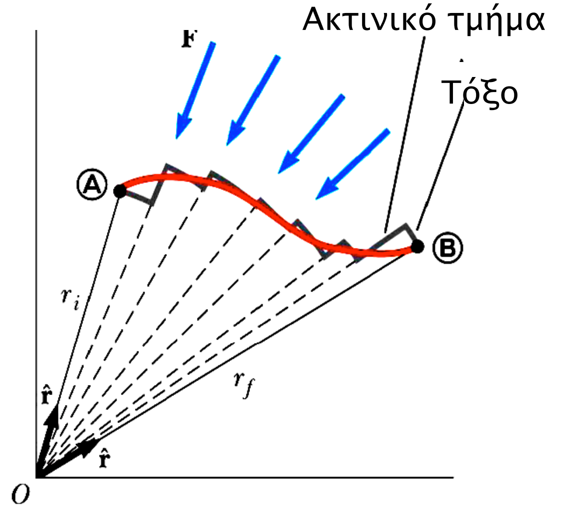
Βαρυτική δυναμική ενέργεια

- Η βαρυτική δύναμη είναι συντηρητική δύναμη
- Η βαρυτική δύναμη είναι κεντρική δύναμη
  - Έχει ακτινική διεύθυνση με φορά προς το κέντρο
  - Το μέτρο της εξαρτάται μόνο από την απόσταση r
  - Μια κεντρική δύναμη μπορεί να γραφεί $F(r)\,\hat{r}$
- Σωματίδιο κινείται από το σημείο Α στο Β υπό την επίδραση κεντρική δύναμης
- Μπορούμε να χωρίσουμε τη διαδρομή σε μια σειρά από ακτινικά τμήματα και τμήματα τόξου
- Το έργο κατά μήκος των τμημάτων τόξου είναι μηδέν και επομένως το έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση r_f και r_i



Βαρυτική δυναμική ενέργεια

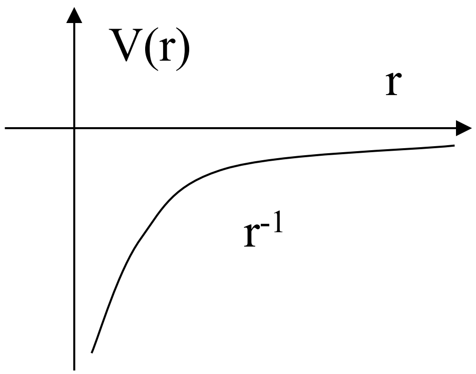
Για να βρούμε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια, χρειάζεται να ολοκληρώσουμε τη δύναμη.

$$F=-\frac{dV}{dr}\Rightarrow dV=-\int_{r_1}^{r_2}F\,dr=-\int_{r_1}^{r_2}\left(-G\frac{Mm}{r^2}\right)dr=-\frac{GMm}{r}\Bigg|_{r_1}^{r_2}\Rightarrow dV=-GMm\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

(-) επειδή η δύναμη είναι ελκτική

Δαπανώμενο έργο για να κινηθεί η μάζα m ως την M

- Συνήθως θεωρούμε σα σημείο αναφοράς το σημείο $r_1 = \infty$



$$V(r)=-\frac{GMm}{r},\quad V(\infty)=0$$

Η ειδική περίπτωση: mgh

- Για την δυναμική ενέργεια βαρύτητας έχουμε μάθει να χρησιμοποιούμε τη σχέση: mgh
    - Αυτή είναι ειδική περίπτωση της γενικής εξίσωσης: $-G\dfrac{Mm}{r}$ κοντά στην επιφάνεια της γης, γιατί:

$$\Delta V = GMm\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+h}\right) = \frac{GMm}{R}\left(1-\frac{1}{1+h/R}\right) = \frac{GMm}{R}\left(1-\frac{1}{1+\varepsilon}\right) \Rightarrow$$

Επειδή ε << 1 μπορούμε να πάρουμε το διονυμικό ανάπτυγμα: $\dfrac{1}{1+\varepsilon} = 1-\varepsilon+\cdots$

$$\Delta V = \frac{GMm}{R}\left[1-\left(1-\frac{h}{R}\right)\right] = \left(\frac{GM}{R^2}\right)mh \equiv mgh$$

$\boxed{\text{Η σχέση αυτή ισχύει μόνο για h << R}}$

Στις 2 τελευταίες σελίδες κάναμε ένα μεγάλο κύκλο: ολοκληρώσαμε τη δύναμη για να πάρουμε το δυναμικό, διαφορίσαμε το δυναμικό και πολλαπλασιάσαμε με h για να πάρουμε έργο: Fh=mgh

Quiz

- Γράψτε σε μια σελίδα το όνομά σας και τον αριθμό ταυτότητάς σας

Έτοιμοι;

Σφαιρικά σώματα και βαρύτητα

- Χρησιμοποιήσαμε τις εκφράσεις $F(r) = -\frac{GMm}{r^2}$ και $V(r) = -\frac{GMm}{r}$ που ισχύουν για σημειακές μάζες M και m.

- Ένα χαρακτηριστικό γεγονός, που κάνει τους υπολογισμούς πολύ πιο εύκολους είναι ότι αυτές οι εξισώσεις ισχύουν και για τις σφαίρες.

  Για τη βαρύτητα, σφαιρικά σώματα μοιάζουν σαν υλικά σημεία με όλη τη μάζα τους στο κέντρο της σφαίρας.

- Προς το παρόν δεχόμαστε δύο σημαντικά γεγονότα:

  - Αν είστε **ΕΞΩ** από μια σφαιρική κοιλότητα, η κοιλότητα μοιάζει σαν υλικό σημείο.

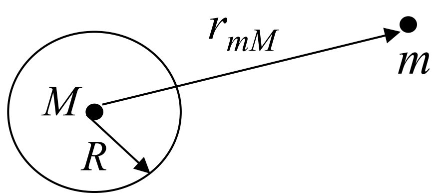
    Οι σφαίρες μοιάζουν να αποτελούνται από πολλές σφαιρικές κοιλότητες και άρα οι σφαίρες μοιάζουν επίσης σαν υλικά σημεία

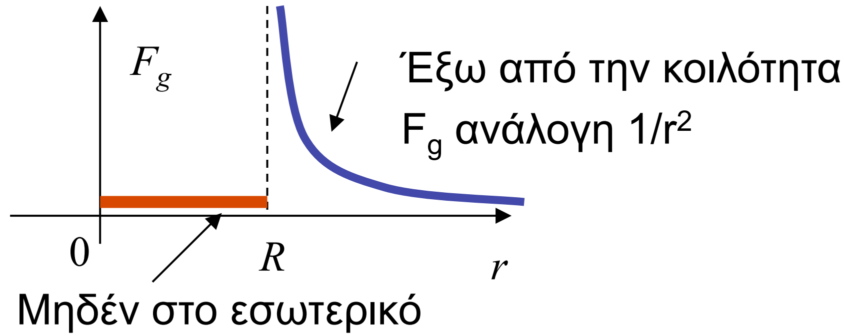
  - Αν είστε **ΜΕΣΑ** σε μια σφαιρική κοιλότητα, η κοιλότητα μοιάζει σαν τίποτα.

    Είναι σα να μην υπάρχει καμιά δύναμη.

Γραφική αναπαράσταση

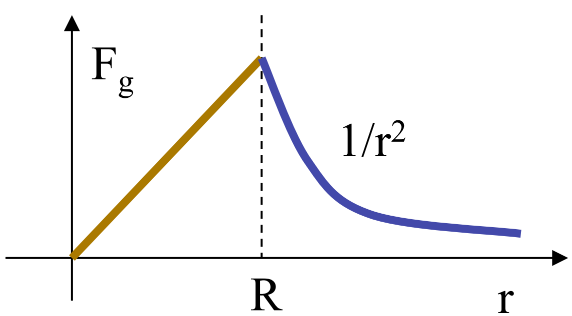
Για σφαιρικές κοιλότητες:





Για σφαίρες: Άθροισμα σφαιρικών κοιλοτήτων

Αθροίζουμε όλες τις σφαιρικές κοιλότητες για να δημιουργήσουμε μια συμπαγή σφαίρα



$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r} \qquad r \geq R$$

$$\vec{F}'_g = -\frac{GmM'}{r^2}\hat{r} \qquad r < R$$

όπου M΄ είναι η μάζα που περιέχεται σε σφαίρα ακτίνας r < R

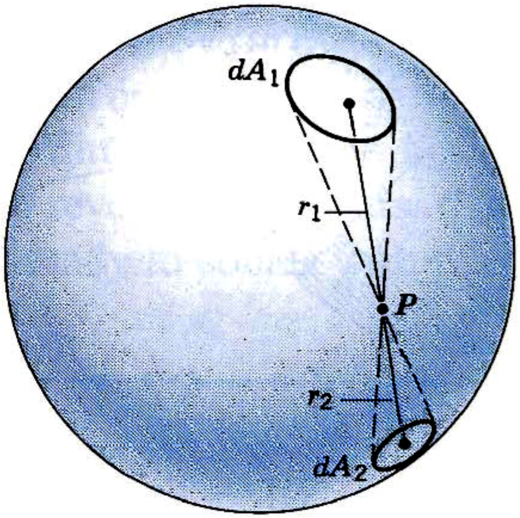
Για σφαίρα ομοιόμορφης πυκνότητας:

$$\frac{M'}{M} = \frac{\rho V'}{\rho V} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow M' = M\frac{r^3}{R^3} \Rightarrow \vec{F}'_g = -\frac{GmM}{r^2}\frac{r^3}{R^3}\hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{F}'_g = -\frac{GmM}{R^3}r\hat{r}} \text{ για } r < R$$

$$\Rightarrow r \to 0 \;\; F_g \to 0$$

Μια απόδειξη για την περίπτωση των κοίλων σφαιρών

κοίλη σφαίρα



Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι δυνάμεις από τα τμήματα των μαζών στις 2 απέναντι πλευρές του P αλληλοαναιρούνται.

Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι η περιοχή A_1 είναι δύο φορές πιο μακριά από το P σε σχέση με την περιοχή A_2.

Επομένως το εμβαδό και άρα η μάζα του A_1 θα είναι 4 φορές μεγαλύτερο από αυτό στο A_2.

Αυτός ακριβώς ο όρος, $4=2^2$, στη μάζα αναιρεί το παράγοντα $2^2=4$ στο r^2 του παρονομαστή της δύναμης, καταλήγοντας σε ίσες και αντίθετες δυνάμεις στο P ➔ $\Sigma F=0$

Σημειώστε ότι το παραπάνω επιχείρημα δεν δουλεύει για κυκλικά στεφάνια (αντί κοιλότητας) γιατί χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα A_1 και A_2 είναι εμβαδά, που είναι ανάλογα των τετραγώνων των αντίστοιχων μηκών.